Title	パラメータ付き零次元代数的局所コホモロジーを用いたパラメトリック・スタンダード基底計算について (Computer Algebra : Design of Algorithms, Implementations and Applications)
Author(s)	鍋島, 克輔; 中村, 弥生; 田島, 慎一
Citation	数理解析研究所講究録 (2012), 1814: 43-53
Issue Date	2012-10
URL	http://hdl.handle.net/2433/194553
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
第 1814 巻 2012 年 43-53

パラメータ付き零次元代数的局所コホモロジーを用いたパラメトリック・スタンダード基底計算について

鍋島克輔
KATSUSUKE NABESHIMA
大阪大学大学院情報科学研究科 / (独) 科学技術振興機構, CREST
GRADUATE SCHOOL OF INFORMATION SCIENCE AND TECHNOLOGY, OSAKA UNIVERSITY / JAPAN SCIENCE AND TECHNOLOGY AGENCY, CREST*

中村弥生
YAYOI NAKAMURA
近畿大学理工学部
SCHOOL OF SCIENCE AND ENGINEERING, KINKI UNIVERSITY †

田島慎一
SHINICHI TAJIMA
筑波大学大学院数理物質科学研究科
GRADUATE SCHOOL OF PURE AND APPLIED SCIENCES, UNIVERSITY OF TSUKUBA ‡

1 はじめに

特異点の性質を研究する際, ヤコビイデアルの冪級数環におけるスタンダード基底を求めることが必要になることが多い。論文 [12] において, 原点を孤立特異点として持つ超曲面に対しそのヤコビイデアルのスタンダード基底を求めるアルゴリズムを与えた。このアルゴリズムでは, まず原点に付随する代数的局所コホモロジーを計算し [10, 11, 12], 次に多変数留数に関するグロタンディーク双対性 [2, 3] を用いることで, これら代数的局所コホモロジーの情報からスタンダード基底を計算するという手法がとられている。この手法の利点として Mora のリダクションのような複雑な計算を必要とせず, 線形代数の手法のみで計算が実行可能であるという点と, アルゴリズムの停止条件の判定が容易である点, 計算が実際に速いということがあげられる。

さて, 特異点論では, 特異点の定義方程式がパラメータを含む場合に特異点の諸性質がパラメータの値にどのように依存し変化するかを明らかにすることが重要な研究課題のひとつになっている。これらの研究を行う際もヤコビイデアル等のスタンダード基底を具体的に求めることが必要になることが多い。しかしこのような場合, パラメータ値を連続的に変化させても対応するスタンダード基底の initial 項や基底をなす

*nabeshima@math.sci.osaka-u.ac.jp
†yayoi@math.kindai.ac.jp
‡tajima@math.tsukuba.ac.jp

生成元の個数は一定とは限らない。実際, パラメータ値を変化させることで基本的構造が異なるスタンダード基底が多数得られることも多い。そのため, パラメータ付きスタンダード基底計算では, パラメータの無い通常のスタンダード基底計算に比べより高度な計算アルゴリズムが要求されることになる。

本研究では, 孤立特異点を持つ超曲面の変形に伴う諸問題に応用することを想定し, 超曲面の定義多項式がパラメータを含む場合にそのスタンダード基底を求める計算法について研究した。論文 [12] で与えたアルゴリズムをパラメータを持つ入力に対応できるよう拡張することで, 特異点に付随したパラメータ付き代数的局所コホモロジーおよびパラメータ付きスタンダード基底を求める計算方法を確立した。更に, 計算機代数システム Risa/Asir[6] にこれらの計算アルゴリズムを実装した。我々の構成したアルゴリズムを用いると, アルゴリズムはスダンダード基底の initial 項集合に注目したパラメータ空間の構成可能集合への stratification (分割) を行い, 分割により得られた各 stratum とその stratum に属するパラメータに対応するスタンダード基底の組を出力する。本稿では, パラメータ付きスタンダード基底がグロタンディーク双対性を使うことによって計算可能であることを述べると共に, アルゴリズムの概略を与える。

2 準備

この章では, 本研究「パラメータ付き零次元代数的局所コホモロジーを用いたパラメータ付きスタンダード基底計算」の元となる "パラメータ無し" の零次元代数的局所コホモロジーを用いたスタンダード計算アルゴリズム [8, 9, 12] を簡単に紹介する。次の章で, このアルゴリズムを拡張したパラメータ付きスタンダード基底計算アルゴリズムの概要を与える。

$\mathbb{C}^n$ の原点 O の近傍 X で定義された正則関数 $f(x)$ であり, 原点を孤立特異点として持つものが与えられたとする。X 上の正則関数のなす層を $\mathcal{O}_X$, その原点における茎を $\mathcal{O}_{X,O}$ で表す。正則関数 $f(x)$ の偏微分 $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)$ が $\mathcal{O}_{X,O}$ 上生成するイデアルを $\mathcal{I}_O$ とおく。原点 O に台を持つ代数的局所コホモロジー $\mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)$ の要素であり, イデアル $\mathcal{I}_O$ より annihilate されるもの全体のなす集合を考え, それを $\mathcal{H}_f$ で表す:

$$\mathcal{H}_f = \left\{ \eta \in \mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X) \;\middle|\; \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\eta = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\eta = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\eta = 0 \right\}$$

さて, 原点 O に台を持つ代数的局所コホモロジー $\mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)$ は, 開集合対 $(X, X - \{O\})$ に対する標準的な相対被覆が定める相対チェックコホモロジーを用いて表現することができる。有理関数 $\left[\frac{1}{x^{\lambda+1}}\right]$ が自然に定める相対チェックコホモロジー類を $\mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)$ に属する代数的局所コホモロジー類と同一視して, $\left[\frac{1}{x^{\lambda+1}}\right] \in \mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)$ で表す (ここで $\lambda \in \mathbb{N}^n$)。この記号を用いると, 原点に台を持つような代数的局所コホモロジー類 $\eta \in \mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)$ はすべて

$$\sum_{\lambda} c_\lambda \left[\frac{1}{x^{\lambda+1}}\right] \quad (c_\lambda \in \mathbb{C}, \lambda = (l_1, l_2, \ldots, l_n) \in \mathbb{N}^n)$$

なる有限和により表現できる。(ただし, $\lambda + \mathbf{1} = (l_1+1, l_2+1, \ldots, l_n+1), \mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)$)。代数的局所コホモロジー類の表現として, この標準的被覆による相対チェックコホモロジーを用いる。以下に特異点に付随した代数的局所コホモロジー $\mathcal{H}_f$ の例を与える。

Example 1. *(E_7 特異点)* 定義多項式は $f(x,y) = x^3 + xy^3$ である。$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y^3$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2$ より,

$$\left[\frac{1}{xy}\right], \left[\frac{1}{xy^2}\right], \left[\frac{1}{x^2y}\right], \left[\frac{1}{xy^3}\right], \left[\frac{1}{x^2y^2}\right] \in \mathcal{H}_f$$

を直ちに得る。更に

$$\left[\frac{1}{xy^4}\right] - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x^3y}\right], \left[\frac{1}{xy^5}\right] - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x^3y^2}\right] \in \mathcal{H}_f$$

も容易に確かめられる。これら 7 つの元は $\mathcal{H}_f$ の基底をなす代数的局所コホモロジー類である。

一般に $\mathcal{H}_f$ は, ベクトル空間として剰余空間 $\mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{I}_O$ の双対ベクトル空間と同一視できる。従って, 収束冪級数環 $\mathcal{O}_{X,O}$ におけるヤコビイデアル $\mathcal{I}_O$ は $\mathcal{H}_f$ により完全に特徴付けられることになり, スタンダード基底を求めることが可能となる。例えば, Example 1 で与えた代数的局所コホモロジー類を用いるとヤコビイデアル $\mathcal{I}_O$ のスタンダード基底を簡単に求めることができる。一般の孤立特異点に対し実際に $\mathcal{H}_f$ を利用してイデアル $\mathcal{I}_O$ のスタンダード基底を求める為には, スタンダード基底の計算に適するような $\mathcal{H}_f$ の基底を構成する必要がある。以下に述べる構成法は, スタンダード基底の計算に最も適した代数的局所コホモロジー類を与える計算法といえる。

計算方法を述べる前に, 記号等をいくつか準備しておく。有理数係数の n 変数多項式環 $K[x]$ に対し, 原点 O に台を持つ代数的局所コホモロジーを

$$H^n_{[O]}(K[x]) = \lim_{k\to\infty} Ext^n_{K[x]}(K[x]/(x_1, x_2, \dots, x_n)^k, K[x])$$

で定める。計算機上では $H^n_{[O]}(K[x])$ に属す代数的局所コホモロジー類 $\sum c_\lambda[\frac{1}{x^{\lambda+1}}]$ を $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ を変数とする n 変数多項式 $\sum c_\lambda \xi^\lambda$ により表現する。このような表現を代数的局所コホモロジー類の**多項式表現**ということにする。

原点 O に孤立特異点を持つ多項式 $f \in K[x]$ に対しベクトル空間 H_f を

$$H_f = \left\{\eta \in H^n_{[O]}(K[x]) \,\middle|\, \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\eta = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\eta = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\eta = 0\right\}$$

で定め, 特異点に付随した代数的局所コホモロジーと呼ぶことにする。また, H_f の基底を求めることを単に代数的局所コホモロジー類を求めるということにする。

さて, スタンダード基底の計算に適するような代数的局所コホモロジー類を求めるため, $H^n_{[O]}(K[x])$ にあらかじめ項順序を定めておく。以下に与える計算法では基本的に 2 つ以上の項の線型結合から成るような代数的局所コホモロジー類を求める際, あらかじめ指定されたこの項順序に関しその initial 項が小さいようなものから順に逐次求めていく。

以下にその概略を与える。

計算方法 1

入力: $f \in K[x]$:多項式, $\succ$: 項順序,

出力: H: f の代数的局所コホモロジー類 (H_f の基底),

F:代数的局所コホモロジーとなることが出来なかった initial 項の候補の集合,

初期化: $H \leftarrow \{\}$, $F \leftarrow \{\}$

STEP 1: 単項の代数的局所コホモロジーの計算

$\left[\frac{1}{x^{\lambda+1}}\right]$ の形で H_f に属するものすべてを求める ($\lambda \in \mathbb{N}^n$)。すなわち, $(\frac{\partial f}{\partial x_1})\left[\frac{1}{x^{\lambda+1}}\right] = \frac{\partial f}{\partial x_2}\left[\frac{1}{x^{\lambda+1}}\right] = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}\left[\frac{1}{x^{\lambda+1}}\right] = 0$ を満たすものを求める。この単項の代数的局所コホモロジーは多項式表現したとき, $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ を構成する単項のグレブナー基底より項順序が低いことが知られている。したがって, $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ を構成する単項たちが定めるグレブナー基底を計算し, 元の表現に直すことにより計算される。得られた集合を H とする。グレブナー基底の項順序に関して最小な元 (単項) を F に加える。

STEP 2: 線型結合の代数的局所コホモロジーの計算

$\sum c_\lambda \left[\frac{1}{x^{\lambda+1}}\right]$ の形の代数的局所コホモロジー類を求める。

1. 単項が STEP 1 で決まっているので, その単項よりも大きく initial 項になる可能性のある項のうち, 項順序に関して小さなものから順に initial 項の候補とする。

2. initial 項の候補より順序の低い項の集合から低階項候補を選択する (参照 [12])。そして,

$$p = \text{initial 項} + \sum(\text{未定係数} \times \text{低階項})\text{ とおく。}$$

3. 条件 $(\frac{\partial f}{\partial x_1})p = (\frac{\partial f}{\partial x_2})p = \cdots = (\frac{\partial f}{\partial x_n})p = 0$ から導かれる線型連立方程式を解く。

解有り 連立方程式が解を持つ時, 解 p を H_f に属する代数的局所コホモロジー類として集合 H に加え, 次の initial 項の候補についても同じような操作を行う。

解無し 連立方程式が解を持たない時, p は H_f に属さない。集合 F に initial 項候補であった項を加えて, 次の initial 項の候補について同じような操作を行う。

4. 終了条件 ([12]) が満たされるまで 2 と 3 を繰り返す。

以上が計算方法の概略である。この計算方法の出力は H_f の基底 H と F である。この出力からイデアル $\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle$ のスタンダード基底を簡単に求めることができる。実際, スタンダード基底の initial 項は F の要素になり, その低階項は H から読みとることができる。これらのアルゴリズムは計算の効率化を図るために実際には様々な改良を加えてある。具体例や詳細等については [1, 8, 9, 12] を参照されたい。

3 パラメータ付き代数的局所コホモロジー

本研究では, 論文 [12] において与えたアルゴリズムを一般化することで, 定義多項式 f がパラメータを含んでいる場合にそのヤコビイデアルのスタンダード基底を求める計算アルゴリズムを導出した。

この章では, このパラメータ付きのスタンダード基底計算アルゴリズムの導出の仕方とその概要を与える。序文において述べたように, スタンダード基底の initial 項は一般にパラメータのとる値により変化し異なる。そのためスタンダード基底を求める為にはパラメータ空間を適切に stratify し更に各 stratum 上でスタンダード基底の計算を行う必要がある。

さて, 前の章で示したように, 計算方法 1 を用いて代数的局所コホモロジー類を構成すると出力 H と F を用いてスタンダード基底を求めることが出来る。特に, スタンダード基底の initial 項は集合 F により与えられる。この集合 F は計算方法 1 による計算の過程において逐次定められるものであるので, 計算方法 1 は, 実質的にスタンダード基底の initial 項を決定しながら代数的局所コホモロジー類を求めているアルゴリズムと見做すことができる。このことに注目すると, 計算方法 1 をパラメータ付きの場合に対応できるように拡張することでスタンダード基底の initial 項の違いによるパラメータ空間の stratification をアルゴリズミックに構成することが可能になることが分かる。実際にパラメータ付きスタンダード基底計算アルゴリズムを導出するには, 計算方法 1 においてパラメータの値により計算を分枝させる必要が生じ得る箇所での考察が必要となる。そこで以下の 3 つの項目 (イ), (ロ), (ハ) について考える。

(イ) ヤコビイデアルの次元

まず考えなければいけないことはイデアルの次元である。計算方法 1 はヤコビイデアル $\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle$ が特異点 O においてゼロ次元であることを前提として作られている。入力する多項式がパラメータを持つ場合そのヤコビイデアはパラメータの値によって次元が変化する可能性がある。例えば $\{ax, by^2 + y\}$ で生成されるイデアルを考える。a, b をパラメータ, x, y を変数とする。global な観点から見ると, $a = 0$ なら y のみの式だけ残り変数が 2 つあることから, これから生成されるイデアルの次元は明らかに 1 である。もし, $a \neq 0$ ならば, それぞれの変数からなる式が存在し, これから生成されるイデアルの次元は 0 である。このように次元はパラメータの値に依存している。スタンダード基底計算に代数的局所コホモロジーを使うためには, 計算の停止性も含めてイデアルがゼロ次元である確証が必要である。さて, どのようにゼロ次元かどうかを判定するか?

ここではヤコビイデアルの global な次元, すなわち多項式環のイデアルとしての次元がゼロであるか否かによりパラメータ空間を分割し, global な次元がゼロである strata に対してのみ計算を実行していくことにする。この global な次元による分類は包括的グレブナー基底系計算 [4, 7, 13] をすることで簡単にできる。

注意: 本来は, ヤコビイデアルが定める variety のうち原点を含むものの次元がゼロであるか否かを判定すべきである。しかし, この local な次元判定の困難を避けるためここでは判定に global な次元を用いる。従って, このアルゴリズムによりゼロ次元でないと分類されたものに対しては, 計算終了後あらためて local な次元判定等を行う必要がある。

(ロ) **単項のグレブナー基底**

次にパラメータの振る舞いを考えないといけない箇所は計算方法 1, STEP 1 での $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ を構成する単項のグレブナー基底計算である。パラメータの値によってグレブナー基底は変化するので, この箇所においても**包括的グレブナー基底系を計算する**必要がある。

(ハ) **線型連立方程式**

最後に重要な改良は箇所は, STEP 2-3 での**線型連立方程式の解法**である。係数がパラメータを含むような線型連立方程式はパラメータの値によって解の構造が変化し, 解を持つか持たないかもパラメータの値に依存する。一般的なガウスの消去法を係数がゼロになるかゼロにならないかで計算を分岐させることにより, パラメータ付き線形連立方程式の解法を構成できる。我々はこの方法を適用し, パラメータ付き線型連立方程式の解法アルゴリズムを計算機代数システム Risa/Asir に実装した。

このような改良を加えることによって, パラメータ付き代数的局所コホモロジーとスタンダード基底計算は可能である。以下は, 定義多項式にパラメータが含まれている場合に孤立特異点に付随した代数的局所コホモロジー類の計算方法である。低階項候補の選び方など詳細については既に [12] に述べたのでここでは説明を省略する。パラメータの取り扱い方を中心に計算方法の概略を述べる。

計算方法 2

入力: $f \in K[x,a]$ ただし, f はパラメータ $a = (a_1, \ldots, a_m)$ を持つ変数 x についての多項式と見做す,
$\succ$ はある全次数項順序である,

出力:$\mathcal{R} = \{R_1, \ldots, R_k\}$, $\mathcal{G} = \{(S_1, H_1, F_1), \ldots, (S_l, H_l, F_l)\}$,
ここで $S_i \subset \mathbb{A}^m$ stratum, H_i は S_i 上での f の代数的局所コホモロジー類, F_i は S_i 上で代数的局所コホモロジーとなることが出来なかった initial 項の候補の集合, $\mathcal{R}$ はゼロ次元とならない stratum R_j の集合, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, l$。また, $R_1 \cup \cdots \cup R_k \cup S_1 \cup \cdots \cup S_l = \mathbb{A}^m$ である。

BEGIN

初期化: $J \leftarrow \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle$

1. J の次元の分類 (global)
   $\mathcal{R} \leftarrow$ 0 次元とならない strata 達
   $\mathcal{Z} \leftarrow$ 0 次元となる strata 達
2. $\mathcal{T} = \{(T_1, G_1), \ldots, (T_d, G_d)\} \leftarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ を構成する単項から生成される包括的グレブナー基底系の計算。($T_1, \ldots, T_s$ は strata, G_i は T_i 上でグレブナー基底となる。)
3. $\mathcal{L} \leftarrow \{\}$
   while $\mathcal{Z} \neq \emptyset$ **do**
   $Z \leftarrow \mathcal{Z}$ から 1 つ要素を選ぶ
   $\mathcal{Z} \leftarrow \mathcal{Z} \backslash \{Z\}$
   $\mathcal{T}' \leftarrow \mathcal{T}$

while $\mathcal{T}' \neq \emptyset$ do
$(T,G) \leftarrow \mathcal{T}'$ から 1 つ (T,G) を選ぶ
$\mathcal{T}' \leftarrow \mathcal{T}' \backslash \{(T,G)\}$
if $T \cap Z \neq \emptyset$ then
$\mathcal{L} \leftarrow \mathcal{L} \cup \{(T \cap Z, G)\}$
end-if
end-while
end-while

4. $\mathcal{L}$ の各要素の stratum 上で線型結合の形の代数的局所コホモロジーの計算
$\mathcal{G} \leftarrow \{\}$
while $\mathcal{L} \neq \emptyset$ do
$(T,G) \leftarrow \mathcal{L}$ から 1 つ要素を選ぶ (T: stratum, G:グレブナー基底より計算)
・項順序 $\succ$ に関して最小な G の項を initial 項にならなかった項の要素として加える。
・G から単項の形の代数的局所コホモロジーを計算し, 代数的局所コホモロジーの集合として保存する。

4-1. 項順序 $\succ$ に関してグレブナー基底 G の最小元よりも大きい項が initial 項になる可能性がある。これらを小さい順に順序付ける。まず, この最小のものを initial 項の候補とする。(以下, 項順序が小さいものから initial 項の候補としてチェックしていく。)

4-2. initial 項の候補より順序の小さい項の中から低階項候補を選択する (参照 [12])。そして,
$$p = \text{initial 項} + \sum(\text{未定係数} \times \text{低階項})\ \text{とおく。}$$

4-3. 条件 $(\frac{\partial f}{\partial x_1})p = (\frac{\partial f}{\partial x_2})p = \cdots = (\frac{\partial f}{\partial x_n})p = 0$ から導かれる線型連立方程式を解く。ここでは, 解を持つ strata(複数有り) と解が存在しない strata(複数有り) が計算される。それぞれの場合について次の操作をする。

Case 1 **解が存在する strata**
それぞれの stratum のときの解を代入しそれぞれの p を得る。それぞれ p を代数的局所コホモロジーとして保存し, ここで得られた各 stratum について次の initial 項の候補も同じような操作を行う。(GOTO 4-2)

Case 2 **解が存在しない strata**
p は代数的局所コホモロジーとなることができない。それぞれの stratum についてこの initial 項を initial 項にならなかった項として保存し, ここで得られた各 stratum について次の initial 項の候補についても同じような操作を行う。(GOTO 4-2)

4-4. ある stratum S_i で終了条件 (参照 [12]) を満たせば, 保存していた代数的局所コホモロジーの集合 H_i, initial 項にならなかった項の集合 F_i を stratum S_i の場合の計算結果として $B_i = (S_i, H_i, F_i)$ とする。
$\mathcal{G} \leftarrow \mathcal{G} \cup \{B_i\}$
終了条件 ([12]) を満たすまで 4-2 から 4-3 を繰り返す。
end-while

Return$[\mathcal{G}, \mathcal{R}]$
END

$\mathcal{G}$ については各 stratum 上のパラメータで, 代数的局所コホモロジー類を持つ。これにより, パラメトリックな代数的局所コホモロジーを計算することが可能である。これらのパラメトリックな代数的局所コホモロジーと initial 項にならなかった集合 F_i により J のスダンダード基底は容易に求まる [8, 9, 12]。

我々はこの計算方法を計算機代数システム Risa/Asir に実装した。この章を締めくくるにあたり，例を用いて計算方法 2 を具体的に示す。紙面の関係上，簡単な例を取り上げる。以後，$\mathbb{V}(g_1,\ldots,g_s)$ は $g_1,\ldots,g_s \in K[a]$ の共通零点集合 $\{(a_1,\ldots,a_m) \in \mathbb{A}^m \,|g_i(a_1,\ldots,a_m) = 0 \text{ for all } 1 \leq i \leq s\}$ を意味する。

x, y を変数として a をパラメータとする。定義多項式 $f = x^4 + ax^2y^2 + y^4$ の代数的局所コホモロジーとイデアル $J = \langle 4x^3 + 2axy^2, 2ax^2y + 4y^3\rangle$ に付随したスタンダード基底を求める。

1. J の次元の分類をする。J の包括的グレブナー基底系を計算しそれぞれの stratum でのグレブナー基底の先頭項をチェックするのみで，各 stratum でのイデアルの次元は計算される。[5] にはパラメータ付きイデアルのための次元分類のための計算コマンドがある。これを利用すると

$$\begin{cases} \mathbb{A}\setminus\mathbb{V}(a^3-4a) \text{ のとき } 0 \text{ 次元}, \\ \mathbb{V}(a) \text{ のとき } 0 \text{ 次元}, \\ \mathbb{V}(a+2) \text{ のとき } 1 \text{ 次元}, \\ \mathbb{V}(a-2) \text{ のとき } 1 \text{ 次元} \end{cases}$$

となる。我々が興味あるものは 0 次元のときである。これより，J が 0 次元となる $\mathbb{A}\setminus\mathbb{V}(a^3-4a)$ と $\mathbb{V}(a)$ の場合を考える。

2. $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ を構成する単項 $\{4x^3, 2axy^2, 2ax^2y, 4y^3\}$ からなるイデアルの包括的グレブナー基底系を計算する。この包括的グレブナー基底系は以下で与えられる。

$$\begin{cases} \mathbb{A}\setminus\mathbb{V}(a) \text{ のとき } \{y^3, xy^2, x^2y, x^3\}, \\ \mathbb{V}(a) \text{ のとき } \{x^3, y^3\}. \end{cases}$$

3. 1 と 2 の結果を比較すると，2 の出力 $\mathbb{V}(a)$ の場合は 1 の出力より 0 次元となることが分かる。しかし，2 の出力 $\mathbb{A}\setminus\mathbb{V}(a)$ の場合は，1 の出力よりパラメータの取る値によって決まり J の次元は 0 もしくは 1 になる。我々は 0 次元のみ必要であるので，1 で求めた stratum と 2 で求めた stratum の共通部分のみ考えればよい。したがって，$\mathbb{V}(a)$ と

$$(\mathbb{A}\setminus\mathbb{V}(a)) \cap (\mathbb{A}\setminus\mathbb{V}(a^3-4a)) = \mathbb{A}\setminus\mathbb{V}(a^3-4a)$$

の 2 つの strata について考える。

4-1. まず，$\mathbb{V}(a)$ のときを考える。このとき，単項の代数的局所コホモロジーは 2 の出力 $\{x^3, y^3\}$ より低い次数のものでありすぐに求めることができる。単項の代数的局所コホモロジーは多項式表示 $(c_{\alpha,\beta}[\frac{1}{x^{\alpha+1}y^{\beta+1}}] \leftrightarrow c_{\alpha,\beta}\xi^\alpha\eta^\beta)$ を用いると $\{1,\eta,\eta^2,\xi,\xi^2,\xi\eta,\xi\eta^2,\xi^2\eta,\xi^2\eta^2\}$ である。いま項順序として全次数辞書式 $\eta \succ \xi$ $(y \succ x)$ を用いる。次に，線型結合の代数的局所コホモロジーを計算する。initial 項候補の小さい項から代数的局所コホモロジーになるかチェックする。単項の基底より大きく，そして最小なものは ξ^3 であるので，最初の候補は ξ^3 である。しかしながら，これは代数的局所コホモロジーの initial 項とならないことは明らかなので，initial 項とならない項として保存しておく (計算方法 2 4-参照)。次に小さいものは η^3 である。この場合も代数的局所コホモロジーとならないので，η^3 を保存する。このとき，終了条件 (参照 [12]) を満たすので，この stratum での計算を終る。最終的にこの計算では

$$(\mathbb{V}(a), \{1,\eta,\eta^2,\xi,\xi^2,\xi\eta,\xi\eta^2,\xi^2\eta,\xi^2\eta^2\}, \{\xi^3,\eta^3\})$$

を得る。

4-2. 次に $\mathbb{A}\setminus\mathbb{V}(a^3-4a)$ のときを考える。このとき，単項の代数的局所コホモロジーは 4-1 と同様に計算方法 2 からすぐに求めることができ，多項式表示すると $\{1,\xi,\xi^2,\eta,\eta^2,\xi\eta\}$ である。次に，線型結合の代

数的局所コホモロジーを計算する。initial 項の候補の小さい項から代数的局所コホモロジーになるかチェックする。単項の基底より大きく，そして最小なものは ξ^3 であるので，最初の候補は ξ^3 である。しかしながら，これは代数的局所コホモロジーの initial 項とならないことは明らかなので，initial 項とならない項として保存しておく (計算方法 2-4 参照)。次に小さいものは $\xi^2\eta$ である。

(1) intial 項の候補が $\xi^2\eta$ のとき，低階項候補は低階項候補の条件 (参照 [8, 9, 12]) より ξ^3 である。ここで，未定係数 c_0 を用いて $p_0=\xi^2\eta+c_0\xi^3$ とおく。4-3 より線型の連立方程式を解き c_0 を決める。このとき，連立方程式の解は存在せず $\xi^2\eta$ を initial 項となることはできないことがわかる。[1)]stratum $\mathbb{C}\setminus\mathbb{V}(a^3-4a)$ では $\xi^2\eta$ は initial 項にならないものとして保存する。次に小さい項は $\xi\eta^2$ である。

(2) intial 項の候補が $\xi\eta^2$ のとき，低階項候補は低階項候補の条件より $\xi^3,\xi^2\eta$ で与えられる。c_{11},c_{12} を未定係数とし $p_1=\xi\eta^2+c_{11}\xi^2\eta+c_{12}\xi^3$ とおく。4-3 より線型の連立方程式を解き未定係数を決める。このとき，$\mathbb{A}\setminus\mathbb{V}(a^3-4a)$ で $c_{11}=0,c_{12}=-\frac{a}{2}$ となる。ここで，線型結合の代数的局所コホモロジーとして $p_1=\xi\eta^2-\frac{a}{2}\xi^3$ を得る。これを保存し次の intial 項の候補 η^3 のチェックをする。

(3) intial 項の候補が η^3 のとき，低階項候補は低階項候補の条件より $\xi^3,\xi^2\eta$ である。$p_2=\eta^3+c_{21}\xi^2\eta+c_{22}\xi^3$ と置く。4-3 より線型の連立方程式を解くと $\mathbb{A}\setminus\mathbb{V}(a^3-4a)$ で $c_{21}=-\frac{2}{a},c_{12}=0$ となる。したがって，$p_2=\eta^3+c_{21}\xi^2\eta-\frac{2}{a}\xi^3$ を得る。p_2 を保存し，次の initial 項の候補をチェックする。次の initial 項の候補は initial 項にならなかった項の情報から $\xi\eta^3$ である。

(4) intial 項の候補が $\xi\eta^3$ のとき，低階項候補は低階項候補の条件より $\xi^3,\xi^4,\xi^2\eta,\xi^3\eta,\xi^2\eta^2$ である。$p_3=\xi\eta^3+c_{31}\xi^4+c_{32}\xi^2\eta^2+c_{33}\xi^3\eta+c_{34}\xi^2\eta+c_{35}\xi^3$ と置く。4-3 より線型の連立方程式を解くと，stratum $\mathbb{A}\setminus\mathbb{V}(a^3-4a)$ では解は存在しない。$\xi\eta^3$ は initial 項にならないものとして保存する。次は η^4 を見る。

(5) intial 項の候補が η^4 のとき，低階項候補は低階項候補の条件より $\xi^3,\xi^4,\xi^2\eta,\xi^3\eta,\xi^2\eta^2,\xi\eta^3$ である。$p_4=\eta^4+c_{41}\xi\eta^3+c_{42}\xi^4+c_{43}\xi^2\eta^2+c_{44}\xi^3\eta+c_{45}\xi^2\eta+c_{46}\xi^3$ と置く。4-3 より線型の連立方程式を解くと，stratum $\mathbb{A}\setminus\mathbb{V}(a^3-4a)$ では解は 1 つ存在し，$c_{41}=0,c_{42}=1,c_{43}=-\frac{3}{a},c_{44}=0,c_{45}=0,c_{46}=0$ となる。したがって，$p_4=\xi\eta^3+\xi^4-\frac{3}{a}\xi^2\eta^2$ である。これを保存する。次は initial 項にならなかった項の情報から η^5 をチェックすることでよい。

(6) intial 項の候補が η^5 のとき，低階項候補は低階項候補の条件より $\xi^3,\xi^4,\xi^2\eta,\xi^3\eta,\xi^2\eta^2,\xi\eta^3,\xi^5,\xi^2\eta^3$, $\xi\eta^4$ である。$p_5=\eta^5+c_{51}\xi^5+c_{52}\xi^2\eta^3+c_{53}\xi\eta^4+c_{54}\xi\eta^3+c_{55}\xi^4+c_{56}\xi^2\eta^2+c_{57}\xi^3\eta+c_{58}\xi^2\eta+c_{59}\xi^3$ と置く。4-3 より線型の連立方程式を解くと，stratum $\mathbb{A}\setminus\mathbb{V}(a^3-4a)$ では解は存在しない。

(7) 終了条件を満たす $\mathbb{A}\setminus\mathbb{V}(a^3-4a)$ のときは終了する。

以上をまとめると次を得た。

$(\mathbb{A}\setminus\mathbb{V}(a^3-4a),\{1,\xi,\xi^2,\eta,\eta^2,\xi\eta,\xi\eta^2-\frac{a}{2}\xi^3,\eta^3+c_{21}\xi^2\eta-\frac{2}{a}\xi^3,\xi\eta^3+\xi^4-\frac{3}{a}\xi^2\eta^2\},\{\xi^3,\xi^2\eta,\xi\eta^3,\eta^5\})$

5. 4-1 と 4-2 から 2 つの strata でのパラメータ付き代数的局所コホモロジーを得た。

6. これら 2 つの strata でのスタンダード基底を求める。項順序は $1\succ x\succ y\succ x^2\succ xy\succ y^2\succ\cdots$ とする。代数的局所コホモロジーからスダンダード基底を求める方法をそれぞの stratum へ適用する。
   - $\mathbb{V}(a)$ のときは，initial 項にならなかった項の集合は $\{\xi^3,\eta^3\}$ であるが ($\xi=x,\eta=y$ と見よ!) それぞれの項は代数数的局所コホモロジーを構成している項の中にはないから，$\{x^3,y^3\}$ そのものがスダンダード基底になる。
   - $\mathbb{A}\setminus\mathbb{V}(a^3-4a)$ のときは，$\{\xi^3,\xi^2\eta,\xi\eta^3,\eta^5\}$ が initial 項にならなかった項の集合である。この中で，$\eta^5,\xi\eta^3$ は代数的局所コホモロジーを構成している項の中にない。したがって，$\{y^5,xy^3\}$ はそれ自体スダンダード基底の生成元となる。$\{\xi^3,\xi^2\eta\}$ は構成する項にあるので，[8, 9, 12] にあるような行列を用いた表現からスタンダード基底の生成元 $x^3+\frac{a}{2}xy^2,x^2y+\frac{2}{a}y^3$ を求めることができる。すなわちスダンダード基底は $\{y^5,xy^3,x^3+\frac{a}{2}xy^2,x^2y+\frac{2}{a}y^3\}$ である。

[1)]注:一般的には，この操作のとき 4-3 のように解が存在する strata，もしくは解が存在しない strata，またはその両方の複数の場合が得られることがある。

以上をまとめると, 項順序 $1 \succ x \succ y \succ x^2 \succ xy \succ y^2 \succ \cdots$ に関しての J のパラメトリック・スタンダード基底は

$$\mathbb{V}(a) \text{ のとき } \{x^3, y^3\}, \quad \mathbb{A} \setminus \mathbb{V}(a^3-4a) \text{ のとき } \left\{y^5, xy^3, x^3+\frac{a}{2}xy^2, x^2y+\frac{2}{a}y^3\right\},$$

であり, $\mathbb{V}(a-2), \mathbb{V}(a+2)$ のとき J は global にゼロ次元ではない。実際, この例では $\mathbb{V}(a-2), \mathbb{V}(a+2)$ の場合は local にもゼロ次元でないので、我々の考察の対象外である

紙面の関係上, 簡単な例を扱った。上の例では連立方程式などで複雑な分枝が現れないが, 一般には分枝が多く現れる。分枝が多くなると stratification の計算自体, 計算機に頼らざるを得ない。本アルゴリズムを計算機に実装したことは今後の特異点の研究にとって非常に意義あることだと考える。

4 スタンダード基底計算アルゴリズムの実行例

パラメータ付きスタンダード基底の例として, この章では我々の実装の出力例を紹介する。原点に特異点を持つ多項式 $f = x^3 + ax^2y^3 + by^5 + xy^4$ を考える (a, b はパラメータである)。我々が実装したコマンド p_std に, 多項式 f, パラメータのリスト [a,b], 変数のリスト [x,y], $1 \succ y \succ x \succ y^2 \succ yx \succ x^2 \succ \cdots$ なる局所全次数辞書式項順序を表す引数 1 を与えると, p_std は, パラメータ付きスタンダード基底を次のように出力する。

```
[627] p_std(x^3+a*x^2*y^3+b*y^5+x*y^4,[a,b],[x,y],1);
non zero-dim.
[]
parametric standard bases
[[a,b],[1]]
[x^2+1/3*y^4,y^3*x,y^7]

[[a],[a,b]]
[b*x^2-4/15*y^3*x,4/5*y^3*x+b*y^4]

[[4*b*a-1],[1]]
[b*x^2+(2/3*b*a-4/15)*y^3*x,4/5*y^3*x+b*y^4]

[[b],[-a,b]]
[x^2+1/6*a^2*y^6+1/3*y^4,y^3*x-1/4*a*y^6,y^7]

[[0],[-20*b^3*a^3+13*b^2*a^2-2*b*a]]
[b*x^2+(2/3*b*a-4/15)*y^3*x,4/5*y^3*x+b*y^4]

[[-5*b*a+2],[1]]
[x^2,4/5*y^3*x+b*y^4]
```

プログラムはまず最初にパラメータの値によってゼロ次元でない場合を出力する。この例の場合は, すべてのパラメータに対しゼロ次元であるので, [] を返している。次に各 stratum とそこでのスタンダード基底を返す。

- パラメータが $\mathbb{V}(a,b)$ に属する場合, すなわち $a=b=0$ のとき, スタンダード基底は $\{x^2+\frac{1}{3}y^4, y^3x, y^7\}$。
- パラメータが $\mathbb{V}(a)\setminus\mathbb{V}(a,b)$ に属する場合, スタンダード基底は $\{bx^2-\frac{4}{15}y^3x, \frac{4}{5}y^3x+by^4\}$。
- パラメータが $\mathbb{V}(4ba-1)$ に属する場合, スタンダード基底は $\{bx^2+(\frac{2}{3}ba-\frac{4}{15})y^3x, \frac{4}{5}y^3x+by^4\}$。
- パラメータが $\mathbb{V}(b)\setminus\mathbb{V}(-a,b)$ に属する場合, スタンダード基底は $\{x^2+\frac{1}{6}a^2y^6+\frac{1}{3}y^4, y^3x-\frac{1}{4}ay^6, y^7\}$。
- パラメータが $\mathbb{A}^2\setminus\mathbb{V}(-20b^3a^3+13b^2a^2-2ba)$ に属する場合, スタンダード基底は $\{bx^2+(\frac{2}{3}ba-\frac{4}{15})y^3x, \frac{4}{5}y^3x+by^4\}$。
- パラメータが $\mathbb{V}(-5ba+2)$ に属する場合, スタンダード基底は $\{x^2, \frac{4}{5}y^3x+by^4\}$。

この例が示すように, 実装したプログラムはパラメータ空間内の stratification の各 stratum とそれに対応するスタンダード基底の組を自動的に出力する。

5 まとめ

特異点解析において代数的局所コホモロジーやスタンダード基底は重要な役割を果たす。特に定義多項式にパラメータが含まれている場合は, パラメータの値により特異点の性質が変わるのでこのような場合に対してスタンダード基底を求める計算法を確立することは重要である。しかし, パラメータ付きのスタンダード基底を求めるプログラムは現在まで実装されていなかった。これは, スタンダード基底を求める既存の計算法をパラメータ付きの場合に拡張していくことに様々な困難が伴うことが主な理由と思われる。

本研究で得たアルゴリズムは, 多変数留数に関するグロタンディーク双対性に基づくことで導出したものであるが, 計算の核となる部分では Mora のリダクションや S 多項式などの難しい計算を必要とせず, 線型計算のみでスタンダード基底の計算を行っている。このように問題を線型計算に帰着させたことにより, パラメータ空間の stratification を効率的に求めることが可能となったといえる。

本研究により, 数式処理システムを用いて, パラメータ付きスタンダード基底を実際に求めることが可能になった。今後の特異点研究に役立つことが大いに期待される。

参考文献

[1] 阿部隆行, 田島慎一, 孤立特異点に付随する代数的局所コホモロジーとヤコビイデアルに対するグレブナー基底の計算法. 数理解析研究所講究録 **1514**, pp.141-147, (2006).

[2] A. Grothendieck, Théoreme de dualité pour les faisceaux algébriques cohérents. *Séminaire Bourbaki* **149**, Paris, (1957).

[3] A. Grothendieck, Local Cohomology. *Lecture Notes in Math* **41**, Springer, (1967).

[4] K. Nabeshima, A Speed-Up of the Algorithm for Computing Comprehensive Gröbner Systems. *Proc. International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pp. 299–306. AMC-Press (2007)

[5] K. Nabeshima, PGB: A package for computing parametric polynomial systems. *Proc. the Joint Conference of ASCM2009 and MACIS2009, MI (Math-for-Industry) Lecture Note* **22**, pp. 111–122. Kyushu University (2009)

[6] M. Noro and T. Takeshima, Risa/Asir- A Computer Algebra System. *Proc. International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pp.387-396, ACM-Press, (1992).

[7] A. Suzuki and Y. Sato, A Simple Algorithm to compute Comprehensive Gröbner Bases using Gröbner

Bases. *Proc. International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pp. 326–331. AMC-Press (2006)

[8] 田島慎一, 零次元代数的局所コホモロジーの計算法とスタンダード基底計算について. 数理解析研究所講究録 **1456**, pp.126-132, (2005).

[9] 田島慎一, 零次元代数的局所コホモロジーの計算法とスタンダード基底計算について II. 数理解析研究所講究録 **1568**, pp.74-80, (2007).

[10] S. Tajima and Y. Nakamura, Algebraic local cohomology class attached to quasi-homogeneous isolated hypersurface singularities. *RIMS, Kyoto Univ.* **41**, pp.1 - 10, (2005)

[11] S. Tajima and Y. Nakamura, Annihilating ideals for an algebraic local cohomology class. *Journal of Symbolic Computation* **44**, pp.435 - 448, (2009)

[12] S. Tajima, Y. Nakamura and K. Nabeshima, Standard bases and algebraic local cohomology for zero dimensional ideals, *Advanced Studies in Pure Mathematics* **56**, pp. 341–361, (2009)

[13] V. Weispfenning, Comprehensive Gröbner bases. *Journal of Symbolic Computation* **14**(1), pp. 1–29 (1992)